Kombination mit Wiederholung – Herleitung der Formel

Beispiel:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 (nicht unterscheidbare) Äpfel auf 3 Kinder zu verteilen?
Das Problem lässt sich als ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen betrachten: „Jeder Apfel zieht sich eins der drei Kinder aus der Urne." Die Tabelle zeigt drei mögliche Ergebnisse:

	K1	K2	K3
a)	OO	O	OO
b)	OOO		OO
c)		O	OOOO

Wir können alle Ergebnisse durch Ziffernfolgen kennzeichnen, wobei 0 für einen Apfel und 1 für eine „Trennwand" zwischen den Kindern steht:

a) 0010100　　　b) 0001100　　　c) 1010000

Damit ist die einleitende Frage auf das schon bekannte (MISSISSIPPI-)Problem zurückgeführt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Nullen und 2 Einsen auf 7 Plätze zu verteilen?

Es gibt $\frac{7!}{5!\cdot 2!} = \binom{7}{5} = 21$ solcher Permutationen mit Wiederholung, also 21 Möglichkeiten, 5 Äpfel auf 3 Kinder zu verteilen.

Verallgemeinerung:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, k (nicht unterscheidbare) Äpfel auf n Kinder zu verteilen?

vgl. obiges Beispiel: k Nullen, $n-1$ Einsen, $k+(n-1)$ Plätze, also $\binom{k+n-1}{k}$ Möglichkeiten

Im Urnenmodell bezeichnet n die Anzahl der Elemente in der Urne und k den Umfang der Stichprobe (mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).